MA’RUZA

FUNKSIYANING UZLUKSIZLIGI

Mavzuning rejasi

1. Funksiyaning nuqtadagi uzluksizligi.
2. Uzilish nuqtalari va ularning turlari.
3. Kesmada uzluksiz funksiyalar va ularning xossalari.

Tayanch so’z va iboralar: funksiyaning nuqtadagi uzluksizligi; uzluksiz va uzilishga ega funksiyalar; birinchi va ikkinchi tur uzilish nuqtalari; yo’qotiladigan(to’g’rilanuvchi) uzilish nuqtasi; sakrash nuqtasi; funksiyaning berilgan nuqtadagi sakrashi; funksiyaning chapdan va o’ngdan uzluksizligi; kesmada uzluksiz funksiyalar.

1. FUNKSIYANING NUQTADAGI UZLUKSIZLIGI

Funksiyaning grafiqi bitta tutash chiziqdan iborat bo`lishi, yoki bir necha (yoki cheksiz ko`p) uzuq-yuluq chiziqlardan iborat bo`lishi mumkin. Birinchi holda chiziq uzluksiz funksiyaning grafigi, ikkinchi holda esa uzluksiz bo`lmagan, yani uzilishga ega funksiya grafigidir (1-2 – rasmlar).

E’tibor berilsa, $y=f(x)$ funksiay grafigining tutash qismiga mos keluvchi istalgan $x=x_0$ nuqtada funksiya chekli limitga ega va u $f(x_0)$ ga teng: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Ya’ni chap va o`ng limitlar mavjud va ular $f(x_0)$ ga teng: $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$

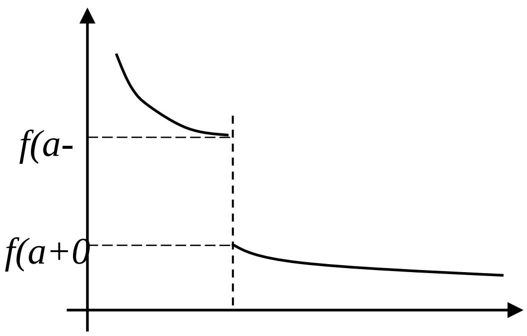
qo’sh tenglik o`rinli. Bunday nuqtalarda funksiya uzluksizdir. Uzuq-yuluq qismlardan iborat grafik qismlarining chegaralariga mos keluvchi nuqtalarda esa bu tengliklar bajarilmaydi (masalan, 1-2-rasmlarda $x=a$ va $x=1$ nuqtalarda). Bunday nuqtalar funksiyaning uzilish nuqtalaridir.

Funksiya nuqtada uzluksizligining ta’rifi

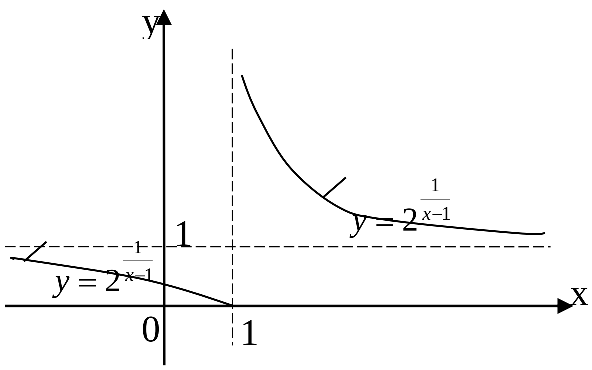
1-ta’rif. $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli x_0 nuqtada

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \qquad (1)$$

bo`lsa, funksiya bu *nuqtada uzluksiz* deyiladi.



1-rasm.



2-rasm

$\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$ bo’lganidan, (1) ni $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0} x)$ deb yozish ham mumkin. Bundan kelib chiqadiki, uzluksiz funksiyaning limitini topishda funksiyaning ifodasida x o’rniga x_o ni qo’yish mumkin.

Eslatma.

1-ta'rif quyidagilarni bildiradi:

1) funksiya x_0 nuqta va uning biror atrofida aniqlangan;

2) $x=x_0$ nuqtada chap va o`ng limitlar mavjud va teng;

3) bu limitlar funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymatiga teng.

Ya'ni

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0) \qquad (2)$$

Masalan:

1. $f(x)=x^2$ funksiya istalgan $x=x_0$ nuqtada uzluksiz. Chunki,

$f(x_0-0)=(x_0-0)^2=x_0^2;\ f(x_0+0)=(x_0+0)^2=x_0^2;\quad f(x_0)=x_0^2.$ (2) qo'sh tenglik bajariladi.

2. $y=2^{\frac{1}{x-1}}$ funksiya x=1 nuqtada uzluksiz emas. Chunki,

$$f(1-0)=\lim_{x\to1-0}f(x)=\lim_{x\to1-0}2^{\frac{1}{x-1}}=2^{\frac{1}{1-0-1}}=2^{-\infty}=\frac{1}{2^{\infty}}=0;$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to1+0}f(x)=\lim_{x\to1-0}2^{\frac{1}{x+1}}=2^{\frac{1}{1+-0-1}}=2^{+\infty}=\infty;\quad f(1-0)\neq f(1+0),$$ ya'ni

$\lim\limits_{x\to1}f(x)$ mavjud emas. Lekin funksiya istalgan $x\neq1$ nuqtada uzluksiz.

Funksiyaning nuqtadagi orttirmasi

$y=f(x)$ funksiya uchun $x=x_0$ nuqtada: $\Delta x=x-x_0$ - argument orttirmasi;

$\Delta y=\Delta f=f(x)-f(x_0)$ - funksiya orttirmasi deyiladi.

x va $f(x)$ ni ular yordamida: $x=x_0+\Delta x,\quad f(x)=f(x_0)+\Delta f$ ko'rinishda yozish mumkin.

Masalan:

1. $f(x)=3x+5$ funksiyaning $x=1$ nuqtadagi argument va funksiya orttirmalari:

$$\Delta x=x-1;\quad \Delta f=f(x)-f(1)=3x+5-(3\cdot1+5)=3x-3.$$

Unda $x=1+\Delta x,\quad f(x)=f(1+\Delta x)=3(1+\Delta x)+5=3\Delta x+8$ deyish mumkin.

2. $y=x^2+2$ funksiyaning istalgan x nuqtadagi orttirmasi:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2+2-((x^2+2)=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+2-(x^2+2)=$$
$$=2x\Delta x+(\Delta x)^2;\qquad \Delta y=\Delta x(2x+\Delta x).$$

$x-x_0=\Delta x,\quad f(x)-f(x_0)=\Delta y$ tengliklardan $x\to x_0$ da $\Delta x\to0$, $f(x)\to f(x_0)$ da $\Delta y\to0$ va $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{x-x_0\to0}[f(x)-f(x_0)]=0,$ ya'ni funksiya uzluksizligi ta'rifi (1) ni

$$\lim_{\Delta x\to0}\Delta y=0.$$

deb yozish mumkin. Bundan quyidagi ta'rif kelib chiqadi.

Funksiya nuqtada uzluksizligining orttirma yordamidagi ta'rifi

2–ta'rif. Funksiya berilgan nuqtada uzluksiz deyiladi, agar bu nuqtada argumentning cheksiz kichik orttirmasiga funksiyaning ham kichik orttirmasi mos kelsa, yani

$$\lim_{\Delta x\to0}\Delta y=0. \qquad (3)$$

Masalan**:** $y=\frac{1}{x}$ funksiyani (3) dan foydalanib, x nuqtada uzluksizlikka quyidagicha tekshirish mumkin:

$$\lim_{\Delta x\to0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to0}(f(x+\Delta x)-f(x))=\lim_{\Delta x\to0}\left(\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}=\frac{0}{x^2}=0.\ (x\neq0).$$

Demak, berilgan funksiya barcha $x\neq0$ nuqtalarda uzluksiz.

Nuqtada uzluksiz funksiylarning xossalari

1-teorema. Biror nuqtada uzluksiz bo'lgan funksiyalarning yig'indisi, ko'paytmasi, nisbani (agar qaralayotgan nuqtada maxraj nolga aylanmasa) ham shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

2-teorema. Agar $f(u)$ funksiya $u = A$ nuqtada uzluksiz, $u = g(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada uzluksiz va $g(x_0) = A$ bo'lsa, $f(g(x))$ murakkab funksiya $x = x_0$ nuqtada uzlusiz bo'ladi.

3-teorema. Barcha elementar funksiyalar o'z aniqlanish sohasida uzluksizdir.

Bu teoremalarning isbotlari limitning xossalaridan kelib chiqadi.

1-misol

$f(x) = x^3$ funksiyani x_o=2 nuqtada uzluksizlikka tekshiring.

Δ *1-usul.* 1-ta'rifdan foydalanib tekshiramiz:

1) $f(x_0)=f(2)=2^3=8$. Funksiya $x_0=2$ nuqtada aniqlangan.
2) $f(2-0)=\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=2^3=8$; $f(2+0)=\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=2^3=8$; $f(2-0)=f(2+0)$;
3) $f(2-0)=f(2+0)=f(2)$.

(2) shart bajariladi, funksiya x_o=2 nuqtada uzluksiz.

2-usul. Orttirma yordamida tekshiramiz: $\Delta x=x-x_0$, $x=x_0+\Delta x$,

$$\Delta y = f(x) - f(x_0) = x^3 - x_0^3 = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = x_0^3 + 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 +$$

$$+ (\Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0\Delta x \cdot (x_0 + \Delta x).$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} 3x_0\Delta x \cdot (x_0 + \Delta x) = 0,$$

(3) shart bajariladi, funksiya x_o=2 nuqtada uzluksiz. ▲

Funksiyaning chapdan va o'ngdan uzluksizligi

3-ta'rif. Agar *f(x)* funksiya x_0 nuqtada aniqlangan bo`lib,

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) \ \ [f(x_0 + 0) = f(x_0)]$$

bo`lsa, funksiya x_0 nuqtada **chapdan(o'ngdan) uzluksiz** deyiladi.

Masalan: [0; 1] kesmada aniqlangan $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ funksiya x=0 nuqtada o'ngdan, x=1 nuqtada chapdan uzluksizdir. Haqiqatan:

$$f(1-0) = \sqrt{1-0} + \sqrt{1-(1-0)} = 1 = f(1); \quad f(+0) = \sqrt{+0} + \sqrt{1-(+0)} = 0 + 1 = 1 = f(1).$$

2. UZILISH NUQTALARI VA ULARNING TURLARI

Uzilish nuqtalarining ta'riflari

1- ta'rif. Uzluksizlik shartlari bajarilmaydigan nuqtalar funksiyaning uzilish nuqtalari deyiladi.

2 - ta'rif. Agar $f(x_0-0)$ va $f(x_0+0)$ limitlar mavjud, lekin $f(x_0-0)=f(x_0+0)=f(x_0)$ tenglik bajarilmasa, x_0 - $f(x)$ funksiyaning birinchi tur uzilish nuqtasi deyiladi. Bunda, agar $f(x_0-0)=f(x_0+0)\neq f(x_0)$ bo`lsa, $x_0$ - yo`qotiladigan yoki chetlatiladigan uzilish nuqtasi; $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$ bo'lsa - sakrash nuqtasi deyilasi. $f(x_0+0) - f(x_0-0)$ ayirma esa $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi sakrashi deb ataladi.

3 - ta'rif. 1-turga tegishli bo`lmagan uzilish nuqtasi ikkinchi tur uzilish nuqtasi deyiladi. Bunday uzilish nuqtasida bir tomonlama limitlardan kamida biri mavjud emas yoki cheksiz bo'ladi.

1-misol.

$f(x) = \dfrac{x-1}{|x-1|}$ funksiya uzilish nuqtasining turini aniqlang.

Δ Uzilish nuqtasi x=1 da bir tomonli limitlarni topamiz:

$$f(1-0) = \lim_{x\to 1-0}\frac{x-1}{|x-1|} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{x-1}{|x-1|} = \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{x-1}{-(x-1)} = -1;$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}\frac{x-1}{|x-1|}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x-1}{|x-1|}=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x-1}{x-1}=1. \quad f(1-0)\neq f(1+0).$$

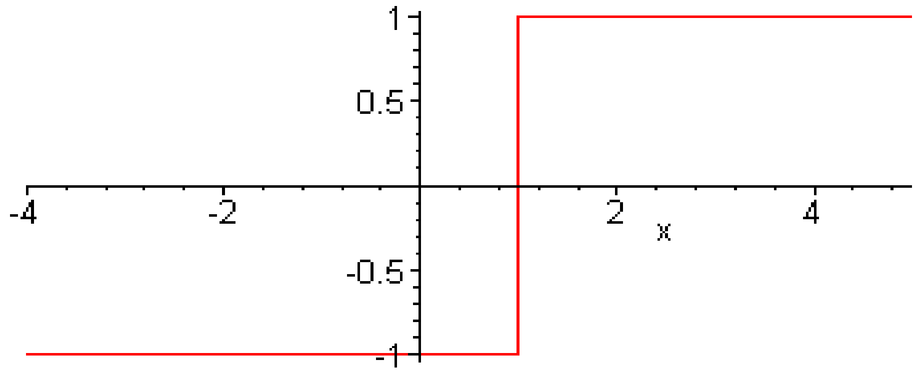
Demak, x=1 birinchi tur uzilish nuqtasi, uning xususiy holi sakrash nuqtasi ekan. Bu nuqtadagi funksiyaning sakrashi: $f(1+0)-f(1-0)=1-(-1)=2.$ ▲

1-misolning **Maple KMS** da yechilishi

Maple KMS da *f(x)* funksiyaning uzilish nuqtasi > **singular(f(x),x);** funksiyasi yordamida topiladi. Turini esa grafikka qarab aniqlash mumkin (1-rasm).

> **f:=x->(x-1)/abs(x-1);** $f:=x\to\frac{x-1}{|x-1|}$

> **singular(f(x),x);** $\{x=1\}$ > **plot(f(x), x=-4..5);**



3-rasm

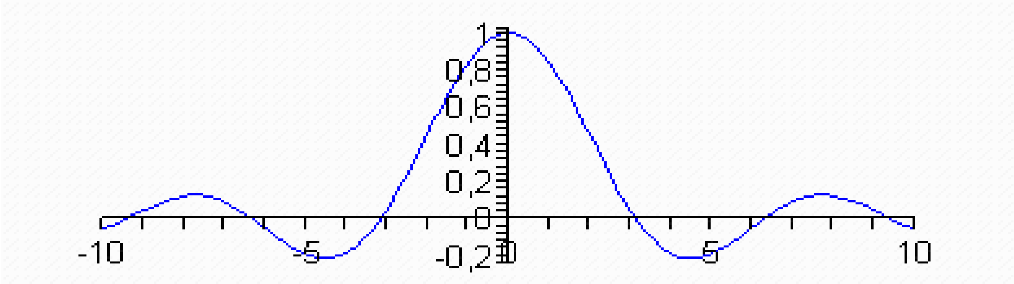
2-misol.

$f(x)=\frac{\sin x}{x}$ funksiya uzilish nuqtasining turini aniqlang.

Δ Uzilish nuqtasi *x=0* bolib, *f(0)* aniqlanmagan (0/0 aniqmaslik). *x=0* da bir tomonlama limitlarni topamiz:

$$f(-0)=\lim_{x\to -0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{\sin x}{x}=1; \quad f(+0)=\lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{\sin x}{x}=1; \quad f(-0)=f(+0).$$

Uzilish nuqtasida bir tomonli limitlar teng, lekin funksiya aniqlanmagan. Demak, *x=0* birinchi tur, uning xususiy holi yo'qotiladigan uzilish nuqtasidir. Agar *f*(*0*)=1 deb olsak, funksiya *x=0* da uzluksiz bo'ladi. Funksiyaning grafigi 4-rasmda keltirilgan. ▲



4-rasm.

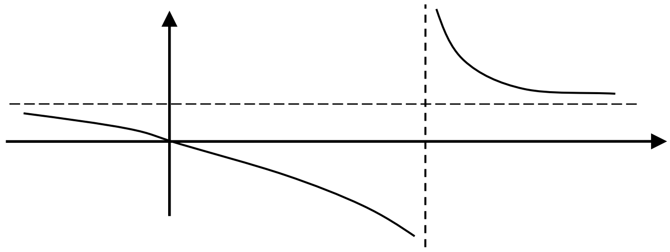
3-misol

x=3 nuqta *f(x)*= $\frac{x}{x-3}$ funksiyaning uzilish nuqtasi ekanini ko`rsating.

Δ *f(3-0)* va *f(3+0)* chap va o`ng limitlarni hisoblaymiz:

$$f(3-0) = \lim_{x\to 3-0}\frac{x}{x-3} = \frac{3-0}{3-0-3} = \frac{3}{-0} = -\infty; \qquad f(3+0) = \lim_{x\to 3+0}\frac{x}{x+3} = \frac{3+0}{3+0-3} = \frac{3}{+0} = +\infty.$$

x=3 nuqtada bir tomonli limitlar cheksiz. Shuning uchun *x=3* ikkinchi tur uzilish nuqtasi. Funksiyaning grafigi 3-rasmda keltirilgan. ▲



5-rasm

3. KESMADA UZLUKSIZ FUNKSIYALAR VA ULARNING XOSSALARI

Funksiyaning intervalda va kesmada uzluksizligi ta'riflari

1-ta'rif. (*a, b)* intervalning har bir nuqtasida uzluksiz funksiya shu *intervalda uzluksiz* deyiladi.

2-ta'rif. Funksiya *[a, b]* *kesmada uzluksiz* deyiladi, agar u (*a, b)* intervalda uzluksiz, *x=a* nuqtada o`ngdan, *x=b* nuqtada chapdan uzluksiz bo`lsa.

Ko'rsatish mumkinki, biror oraliqda uzluksiz funksiyalarning algebraik yig`indisi, ko`paytmasi, nisbati(kasr maxraji nolga aylanmaydigan nuqtalarda) va kompozitsiyasi ham shu oraliqda uzluksizdir.

Kesmada uzluksiz funksiyaning xossalari.

1- teorema. [*a, b*] kesmada uzluksiz *f(x)* funksiya bu kesmada chegaralangandir, ya'ni shunday K>0 son mavjudki, bu kesmada $|f(x)| \le K$ bo'ladi.

2- teorema (Veyershtrass teoremasi). [*a, b*] kesmada uzluksiz *f(x)* funksiya bu kesmada kamida bir marta o'zining eng kichik m va katta M qiymatiga erishadi, ya'ni shunday m va M sonlar mavjudki, $m \le f(x) \le M$ bo'ladi.

3- teorema. Agar [*a, b*] kesmada uzluksiz *f(x)* funksiya kesmaning uchlarida turli ishorali qiymatar qabul qilsa, *a* va *b* orasida kamida bitta *c* son topiladiki, bu nuqtada $f(c) = 0$ bo'ladi.

Natija. Agar $f(a)\cdot f(b) < 0$ bo'lsa, $f(x) = 0$ tenglama (a; b) oraliqda kamida bitta ildizga ega bo'ladi.

4- teorema. Agar *f(x)* funksiya [*a, b*] kesmada uzluksiz, *f(a)=A, f(b)=B (A≠B), C* son *A* va *B* orasida bo'lsa, (*a*; *b*) intervaldagi kamida bitta *c* nuqtada *f(c)=C* bo'ladi.

Natija. Kesmada uzluksiz funksiya bu kesmada o'zining eng katta va eng kichik qiymatlarini va ular orasidagi barcha qiymatlarni qabul qiladi.